Lista de Aplicações de Integrais

1 Volume de sólidos

Exercício 1.1: Esboce o sólido obtido através da rotação, em torno do eixo-x, dos seguintes conjuntos e calcule seu volume.

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\ ,\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x^2}\right\}$
2. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4\ ,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$
3. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ 0 \leq y\right\}$
4. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq 2\right\}$

Exercício 1.2: Calcule o volume do sólido cuja base é o quadrado de vértices $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$, e as secções perpendiculares ao eixo-x são triângulos isósceles de altura $x - x^2$. Esboce esse sólido.

Exercício 1.3: Calcule o volume do sólido cuja base é um triângulo equilátero de lado l, e as secções perpendiculares a um dos lados são quadrados. Esboce esse sólido.

2 Comprimento de curva

Exercício 2.1: Calcule o comprimento das seguintes curvas:

1. $y = cosh(x)$, com $0 \leq x \leq 1$. Lembrando que o cosseno hiperbólico é dado por
$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
2. $y = senh(x)$, com $0 \leq x \leq 1$. Lembrando que o seno hiperbólico é dado por
$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
3. $y = \sqrt{x}$, com $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$.
4. $y = \frac{4}{3}x + 3$, com $0 \leq x \leq 2$.

Exercício 2.2: Calcule o comprimento das curvas dadas na forma paramétrica:

1. $x = 1 - cos(t)$ e $y = t - sen(t)$ com $0 \leq t \leq \pi$.
2. $x = 1 - cos(t)$ e $y = t - sen(t)$ com $0 \leq t \leq \pi$.
3. $x = cosh(t)$ e $y = senh(t)$ com $0 \leq t \leq 1$.
4. $x = 2t + 1$ e $y = t - 1$ com $1 \leq t \leq 2$.

Exercício 2.3: Uma partícula se desloca no plano segundo equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Sabe-se que, para todo t, a velocidade de x é 2 e a aceleração de y é -2. Sabendo que a velocidade inicial (em $t = 0$) de y é 4 e que encontra-se na posição $(0,0)$, determine a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = T$, sendo que T é o instante em que a partícula toca o eixo-x. Como é a trajetória dessa partícula?

3 Coordenadas Polares

Exercício 3.1: Desenhe a curva dada por:

1. $\rho = e^{-\theta}$, com $\theta > 0$.
2. $\theta = \frac{\pi}{4}$.
3. $\rho = cos(\theta)$.
4. $\rho = tg(\theta)$.

Exercício 3.2: Descreva as curvas abaixo na forma de coordenadas polares e esboce-as.

1. $x^4 - y^4 = 2xy$.
2. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Exercício 3.3: Calcule a área da região limitada pela curva dada por:

1. $\rho = 2 - cos(\theta)$.
2. $\rho = cos(2\theta)$.

4 Centro de Massa

Exercício 4.1: Calcule o centro de massa das seguintes regiões:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1 \ , \ 0 \leq x \ , \ 0 \leq y\}$
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \ , \ -2 \leq x \leq 2\}$
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : cosh(x) \ , \ -1 \leq x \leq 1\}$
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : senh(x) \ , \ -1 \leq x \leq 1\}$
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \ , \ -x \leq y \ , \ 0 \leq x \leq 1\}$

Exercício 4.2: Sejam A_1 e A_2 dados por:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3 \ , \ 1 \leq y \leq 2\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4 \ , \ 2 \leq y \leq 3\} .$$

Determine o centro de massa de $A = A_1 \cup A_2$.

5 Trabalho

Exercício 5.1: Considere uma partícula que se desloca ao longo do eixo-x com força $F(x) = (f(x), 0)$. Calcule o trabalho realizado pela força em cada um dos casos a seguir:

1. $f(x) = 3$ em $a = 0$ e $b = 2$.
2. $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ em $a = 1$ e $b = 2$.
3. $f(x) = -3x$ em $a = -1$ e $b = 1$.